

Mathematical Model of Tuberculosis Disease Spread with Vaccination in Mataram City

M. Putra Sani Hattamurrahman^{*1}, Samsul Ma'rif², Ahmad Junaedi³

^{1,2,3} Prodi Tadris Matematika, Fakultas Tarbiyah dan Keguruan, Institut Agama Islam Al Manan Lombok Timur, NTB, Indonesia

Email: ^{*}sanihatta98@gmail.com, ²samsulmarif207@gmail.com,
³ahmadjunaedi09@gmail.com

Abstract

Indonesia is one of the countries with the highest number of tuberculosis (TB) patients in the world. This study discusses a mathematical model of TB disease spread by incorporating vaccination as a form of public health intervention using the SEIVR (Susceptible, Exposed, Infected, Vaccinated, Recovered) compartment model. The objectives of this study are to construct a mathematical model of TB spread, analyze the stability points of the model using the Next Generation Matrix (NGM) method, and evaluating the impact of vaccination through numerical simulation. The results of the analysis show that the basic reproduction number \mathcal{R}_0 without vaccination is $1.31 > 1$, so that the endemic equilibrium point is locally stable asymptotically. Meanwhile, with vaccination \mathcal{R}_0 drops to $0.91 < 1$, making the disease-free equilibrium point stable. The simulation results confirm that without vaccination, the number of active TB cases increases and the peak of infection is higher, while with vaccination, the number of active cases decreases significantly, the susceptible population decreases more rapidly, and the number of immune individuals increases. These findings confirm the importance of vaccination as an effective intervention in controlling the spread of TB in the community, as well as a strategy to reduce the basic reproduction number and prevent a spike in cases.

Keyword: *Tuberculosis, mathematical model, compartmental epidemiology, vaccination, Mataram, Next Generation Matrix.*

Abstrak

Indonesia merupakan salah satu negara dengan jumlah penderita tuberkulosis (TB) tertinggi di dunia. Penelitian ini membahas suatu model matematika penyebaran penyakit TB dengan memasukkan vaksinasi sebagai bentuk intervensi kesehatan masyarakat, menggunakan model kompartemen SEIVR (Susceptible, Exposed, Infected, Vaccinated, Recovered). Tujuan penelitian ini adalah menyusun model matematika penyebaran TB, menganalisis titik-titik kestabilan model menggunakan metode Next Generation Matrix (NGM), serta mengevaluasi dampak vaksinasi melalui simulasi numerik. Hasil analisis menunjukkan bahwa bilangan reproduksi dasar \mathcal{R}_0 tanpa vaksinasi sebesar $1,31 > 1$, sehingga titik keseimbangan endemik bersifat stabil asimtotik lokal. Sedangkan dengan vaksinasi \mathcal{R}_0 turun menjadi $0.91 < 1$, menjadikan titik keseimbangan bebas penyakit stabil. Hasil simulasi menegaskan bahwa tanpa vaksinasi, jumlah kasus TB aktif meningkat dan puncak infeksi lebih tinggi, sementara dengan vaksinasi, jumlah kasus aktif menurun secara signifikan, populasi rentan berkurang lebih cepat, dan jumlah individu kebal meningkat. Temuan ini menegaskan pentingnya vaksinasi sebagai intervensi efektif dalam mengendalikan penyebaran TB di masyarakat, serta sebagai strategi untuk menurunkan bilangan reproduksi dasar dan mencegah lonjakan kasus.

Kata kunci: Tuberkulosis, model matematika, epidemiologi kompartemen, vaksinasi, Mataram, Next Generation Matrix.

PENDAHULUAN

Perkembangan dan kemajuan dunia modern saat ini tidak bisa dipisahkan dari matematika (Ramdani, 2006). Hampir seluruh aktivitas manusia berkaitan dengan matematika, baik dalam ilmu pengetahuan, teknologi, maupun kehidupan sehari-hari (Salim Nahdi, 2019). Matematika digunakan sebagai alat penting di berbagai bidang, termasuk ilmu pengetahuan alam, rekayasa, medis, dan ilmu sosial seperti ekonomi dan psikologi (Sumarni, 2018). Proses pemodelan matematika memungkinkan

fenomena dunia nyata dipresentasikan dalam bentuk persamaan atau model matematis, sehingga pemahaman terhadap masalah nyata menjadi lebih tepat dan sistematis (Husna et al., 2024).

Model matematika tidak hanya digunakan di bidang fisika atau ekonomi, tetapi juga diaplikasikan dalam bidang kesehatan, khususnya epidemiologi. Salah satu penyakit menular yang dapat dimodelkan secara matematis adalah tuberkulosis (TB) (Zahwa et al., 2022). TB disebabkan oleh bakteri *Mycobacterium tuberculosis* dan sebagian besar menyerang paru-paru, meskipun organ lain juga bisa terkena. Penyakit ini menjadi masalah serius karena memiliki angka kesakitan dan kematian yang tinggi (Aini et al., 2017). Gejala TB meliputi batuk berkepanjangan, sakit dada, sesak napas, demam, penurunan berat badan, dan kelelahan (Stewart, 1891).

Menurut data World Health Organization (WHO) pada tahun 2014, Indonesia menempati peringkat keempat dunia dalam jumlah pasien TB setelah India, Cina, dan Afrika Selatan (Anugrah, 2014). Penyebaran TB dipengaruhi oleh faktor lingkungan yang kurang sehat, tingginya kejadian gizi buruk, dan munculnya epidemik HIV/AIDS di beberapa wilayah (Hakim, 2019). Penyebaran yang cepat ini juga menyebabkan tingginya jumlah latent infected (terinfeksi tapi belum menular) dan actively infected (terinfeksi dan menular) (Ulfasari Rafflesia, 2014). Kondisi ini menunjukkan perlunya strategi pengendalian yang efektif, baik melalui pengobatan maupun intervensi masyarakat (Irfandi et al., 2024).

Pemodelan penyebaran TB telah banyak dilakukan dengan berbagai pendekatan. Jia et al., sebagaimana dikutip oleh Jia et al., (2011), membagi populasi TB dalam lima kelas dengan membagi kelas latent menjadi dua subpopulasi. Model ini memungkinkan analisis lebih rinci mengenai dinamika penyakit, termasuk kemungkinan sembuh tanpa menjadi aktif atau kembali menjadi rentan. Model-model seperti ini menjadi dasar bagi pengembangan model yang lebih realistik untuk evaluasi intervensi di tingkat lokal (Agustanico Dwi Muryadi, 2017).

Berbagai model matematika telah dikembangkan untuk menggambarkan dinamika penyebaran TB (Christyanti & Syahdan, 2019) dan mengevaluasi efektivitas strategi pengendaliannya (Castillo-Chavez & Song, 2004). Salah satu rujukan penting dalam penelitian ini adalah artikel jurnal berjudul *A Mathematical Model for Tuberculosis Infection Transmission Dynamics in the Presence of Testing and Therapy, Isolation and Treatment* yang ditulis oleh Patrick Noah Okolo dkk. Dalam penelitian tersebut, penulis mengembangkan model matematika penyebaran TB dengan mempertimbangkan peran pengujian, terapi, isolasi, dan pengobatan sebagai faktor pengendalian utama. Model tersebut memberikan kerangka matematis yang kuat dalam menggambarkan dinamika TB secara realistik melalui pembagian populasi ke dalam beberapa kompartemen yang saling berinteraksi.

Pemodelan penyakit menular tidak hanya terbatas pada TB, tetapi juga telah diterapkan pada penyakit lain. Dalam penelitian oleh Hattamurrahman dkk (2024), model matematika penyebaran COVID-19 yang memuat kompartemen vaksinasi dianalisis secara matematis dan numerik untuk dua kondisi nilai bilangan reproduksi dasar, $\mathcal{R}_0 < 1$ dan $\mathcal{R}_0 > 1$. Simulasi numerik menunjukkan bahwa pemberian vaksinasi pada proporsi yang besar (misalnya 62% dari populasi) efektif menekan jumlah individu yang terinfeksi, sehingga memperkuat peran vaksinasi sebagai intervensi kesehatan masyarakat yang penting.

Penelitian ini mengadopsi dan mengembangkan struktur dasar model matematika yang diperkenalkan oleh Patrick Noah Okolo dkk sebagai fondasi utama dalam membangun model penyebaran TB. Namun, berbeda dengan fokus penelitian sebelumnya yang menitikberatkan pada pengujian, terapi, dan isolasi, penelitian ini mengarahkan perhatian pada vaksinasi sebagai bentuk intervensi pencegahan. Dengan demikian, model yang digunakan merupakan pengembangan dari model kompartemen yang dirujuk, disesuaikan dengan konteks vaksinasi untuk melihat pengaruhnya terhadap dinamika penyebaran TB.

Pemilihan rujukan model dari Patrick Noah Okolo dkk didasarkan pada kejelasan struktur matematis, kelengkapan analisis kestabilan, serta relevansinya dalam mengkaji intervensi kesehatan masyarakat. Model tersebut dinilai fleksibel untuk dimodifikasi sesuai dengan kebutuhan penelitian ini, khususnya dalam memasukkan kelas yang telah menerima vaksin. Melalui pengembangan ini, diharapkan model yang dibangun tetap memiliki dasar teoritis yang kuat sekaligus relevan dengan kondisi epidemiologis yang dikaji.

Berdasarkan latar belakang tersebut, penelitian ini bertujuan untuk mengkaji dinamika penyebaran TB di Kota Mataram menggunakan model matematika kompartemen yang dikembangkan

dari rujukan Patrick Noah Okolo dkk dengan memasukkan vaksinasi sebagai variabel utama pengendalian. Analisis dilakukan melalui penentuan bilangan reproduksi dasar menggunakan metode Next Generation Matrix serta kajian kestabilan titik kesetimbangan. Selain itu, simulasi numerik digunakan untuk menggambarkan dampak vaksinasi terhadap penurunan jumlah kasus TB secara kuantitatif.

Dengan pendekatan ini, penelitian diharapkan dapat memberikan kontribusi ilmiah tidak hanya dalam pengembangan model matematika TB berbasis vaksinasi, tetapi juga dalam menyediakan dasar analitis bagi perumusan kebijakan kesehatan masyarakat yang lebih efektif, khususnya dalam konteks pengendalian TB di tingkat lokal.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan metode studi literatur yang dilakukan secara bertahap, mulai dari perumusan masalah hingga penarikan kesimpulan. Penyusunan model matematika merujuk pada model penyebaran tuberkulosis yang dikembangkan oleh Patrick Noah Okolo dkk, lalu disesuaikan dengan fokus penelitian ini dengan memasukkan vaksinasi sebagai upaya pencegahan. Model dibangun dalam bentuk sistem persamaan diferensial yang menggambarkan dinamika rentan, terpapar, terinfeksi, divaksinasi, dan sembuh. Analisis dilakukan dengan menentukan bilangan reproduksi dasar menggunakan metode Next Generation Matrix serta mengkaji kestabilan titik kesetimbangan untuk melihat kondisi jangka panjang penyebaran penyakit. Selanjutnya, simulasi numerik digunakan untuk menggambarkan dinamika penyebaran TB di Kota Mataram dan menilai pengaruh vaksinasi terhadap penurunan jumlah kasus.

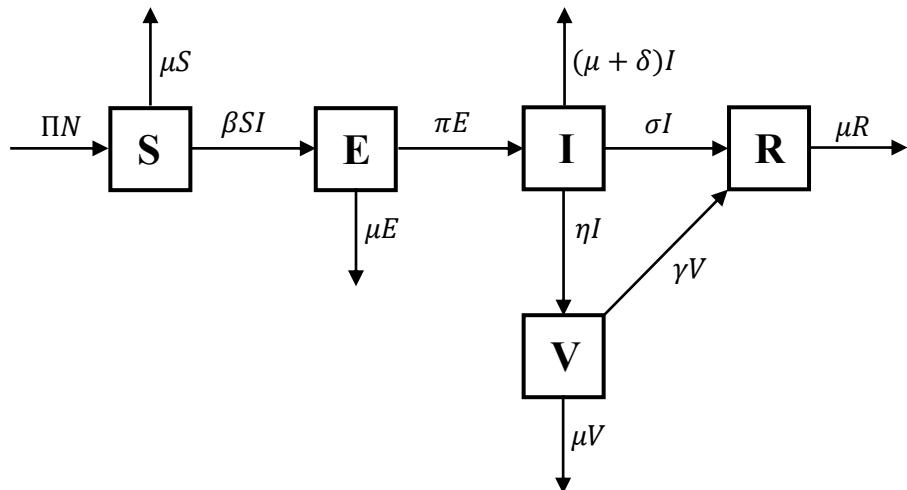
HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Penyusunan Model

Patrick Noah Okolo dkk mengembangkan suatu model epidemi deterministik dalam bentuk sistem persamaan diferensial biasa untuk menggambarkan dinamika penyebaran penyakit tuberkulosis (TB). Dalam model tersebut, populasi total pada waktu t dinotasikan dengan $N(t)$, yang merupakan jumlah dalam seluruh kompartemen.

Pada penelitian ini, model dasar tersebut dikembangkan dengan memasukkan vaksinasi sebagai bentuk intervensi pencegahan. Populasi dibagi ke dalam lima kompartemen utama, yaitu individu rentan (S), terpapar atau laten (E), terinfeksi (I), yang telah divaksinasi (V), dan yang pulih (R). rentan dapat memperoleh vaksin dengan laju gamma dan berpindah ke kelas V. Vaksinasi diasumsikan tidak memberikan perlindungan sempurna, sehingga yang telah divaksin masih memiliki kemungkinan terinfeksi TB, namun dengan tingkat risiko yang lebih rendah dibandingkan rentan yang tidak divaksin.

Pengembangan model ini bertujuan untuk mengkaji pengaruh vaksinasi terhadap dinamika penyebaran TB serta mengidentifikasi parameter-parameter kunci yang berperan dalam menurunkan jumlah kasus TB aktif. Hubungan antar kompartemen dan mekanisme perpindahan dalam model selanjutnya disajikan secara skematis dalam bentuk diagram kompartemen. Diagram tersebut menjadi dasar dalam penyusunan sistem persamaan diferensial biasa yang menggambarkan dinamika penyebaran TB dan disajikan pada bagian berikutnya. Secara skematis, pola penyebaran TB dengan vaksinasi disajikan pada gambar berikut.



Gambar 1. Modifikasi model penyebaran Tuberkulosis dengan Vaksin

Berdasarkan diagram pada Gambar 1, sistem persamaan diferensial biasa yang menggambarkan dinamika penyebaran tuberkulosis dalam model ini dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 \frac{ds}{dt} &= \Pi N - \beta^* SI - \mu S \\
 \frac{de}{dt} &= \beta^* SI - (\mu + \pi)E \\
 \frac{di}{dt} &= \pi E - (\mu + \delta + \sigma + \eta)I \\
 \frac{dv}{dt} &= \eta I - (\mu + \gamma)V \\
 \frac{dr}{dt} &= \sigma I + \gamma V - \mu R \\
 \text{dengan } \beta^* &= \frac{\beta}{N}
 \end{aligned} \tag{1}$$

untuk membuat proporsi dalam sistem persamaan (1) di atas, variabel (S, E, I, V, R) dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut.

$$s = \frac{S}{N}, e = \frac{E}{N}, i = \frac{I}{N}, v = \frac{V}{N}, r = \frac{R}{N}$$

Sehingga sistem persamaan (1) dapat dituliskan ulang sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 \frac{ds}{dt} &= \Pi - \beta s i - \mu s \\
 \frac{de}{dt} &= \beta s i - (\mu + \pi) e \\
 \frac{di}{dt} &= \pi e - (\mu + \delta + \sigma + \eta) i \\
 \frac{dv}{dt} &= \eta i - (\mu + \gamma) v \\
 \frac{dr}{dt} &= \sigma i + \gamma v - \mu r
 \end{aligned} \tag{2}$$

Untuk seterusnya sistem persamaan (2) digunakan dalam analisis. Parameter yang digunakan dalam sistem persamaan (2) dijelaskan dalam Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Deskripsi Parameter

Simbol	Keterangan	Satuan
Π	Laju kelahiran	1/waktu
β	Tingkat kontak efektif antara S dan I yang menyebabkan infeksi	1/waktu
μ	Laju kematian alami	1/waktu
π	Laju perpindahan dari terpapar (E) menjadi terinfeksi (I)	1/waktu

δ	Laju kematian akibat TB pada yang terinfeksi	1/waktu
σ	Laju terinfeksi yang sembuh	1/waktu
η	Laju terinfeksi yang mendapat vaksinasi	1/waktu
γ	Laju yang divaksinasi menjadi sembuh	1/waktu

2. Penentuan Titik Tetap

Titik tetap dari sistem persamaan (2) diperoleh dengan menyelesaikan

$$\frac{ds}{dt} = 0, \frac{de}{dt} = 0, \frac{di}{dt} = 0, \frac{dv}{dt} = 0, \frac{dr}{dt} = 0$$

Sehingga diperoleh sistem persamaan berikut.

$$\Pi - \beta si - \mu s = 0$$

$$\beta si - (\mu + \pi)e = 0$$

$$\pi e - (\mu + \delta + \sigma + \eta)i = 0$$

$$\eta i - (\mu + \gamma)v = 0$$

$$\sigma i + \gamma v - \mu r = 0$$

Dari sistem persamaan di atas diperoleh titik tetap bebas penyakit dan titik tetap endemik.

2.1. Titik tetap bebas penyakit

Titik tetap bebas penyakit merupakan suatu kondisi dimana tidak terdapat penyakit pada populasi tertentu. Titik tetap bebas penyakit diperoleh jika $e = i = v = r = 0$. Sehingga diperoleh titik tetap bebas penyakit sebagai berikut.

$$E_0(s, e, i, v, r) = (s^0, 0, 0, 0, 0)$$

$$\text{dimana } s^0 = \frac{\Pi}{\mu}$$

2.2. Titik tetap endemik

Titik tetap endemik adalah suatu kondisi dimana masih terdapat yang terinfeksi penyakit dari populasi tertentu. Sistem persamaan (2) memberikan titik tetap endemik sebagai berikut.

$$E_1(s, e, i, v, r) = (s^*, e^*, i^*, v^*, r^*)$$

dimana

$$\begin{aligned} s^* &= \frac{(\mu+\delta+\sigma+\eta)(\mu+\pi)}{\beta\pi} & v^* &= \frac{\eta(\frac{\Pi\pi}{(\mu+\delta+\sigma+\eta)(\mu+\pi)} - \frac{\mu}{\beta})}{\gamma+\mu} \\ e^* &= \frac{\Pi}{\mu+\pi} - \frac{\mu(\mu+\delta+\sigma+\eta)}{\beta\pi} & r^* &= \frac{(\mu\sigma+\gamma(\eta+\sigma))(\Pi\beta\pi-\mu(\mu+\delta+\sigma+\eta)(\mu+\sigma))}{\beta\mu(\gamma+\mu)(\mu+\delta+\sigma+\eta)(\mu+\sigma)} \\ i^* &= \frac{\Pi\pi}{(\mu+\delta+\sigma+\eta)(\mu+\pi)} - \frac{\mu}{\beta} \end{aligned}$$

3. Penentuan Matriks Jacobi

Misalkan sistem persamaan (2) ditulis sebagai berikut.

$$\frac{ds}{dt} = f_1(s, e, i, v, r) = \Pi - \beta si - \mu s$$

$$\frac{de}{dt} = f_2(s, e, i, v, r) = \beta si - (\mu + \pi)e$$

$$\frac{di}{dt} = f_3(s, e, i, v, r) = \pi e - (\mu + \delta + \sigma + \eta)i$$

$$\frac{dv}{dt} = f_4(s, e, i, v, r) = \eta i - (\mu + \gamma)v$$

$$\frac{dr}{dt} = f_5(s, e, i, v, r) = \sigma i + \gamma v - \mu r$$

(3)

Dengan melakukan linearisasi sistem persamaan (3) di atas, diperoleh matriks Jacobi sebagai berikut.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s} & \frac{\partial f_1}{\partial e} & \frac{\partial f_1}{\partial i} & \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_1}{\partial r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s} & \frac{\partial f_2}{\partial e} & \frac{\partial f_2}{\partial i} & \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial r} \\ \frac{\partial f_3}{\partial s} & \frac{\partial f_3}{\partial e} & \frac{\partial f_3}{\partial i} & \frac{\partial f_3}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial r} \\ \frac{\partial f_4}{\partial s} & \frac{\partial f_4}{\partial e} & \frac{\partial f_4}{\partial i} & \frac{\partial f_4}{\partial v} & \frac{\partial f_4}{\partial r} \\ \frac{\partial f_5}{\partial s} & \frac{\partial f_5}{\partial e} & \frac{\partial f_5}{\partial i} & \frac{\partial f_5}{\partial v} & \frac{\partial f_5}{\partial r} \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} -(\beta i + \mu) & 0 & -\beta s & 0 & 0 \\ \beta i & -(\mu + \pi) & \beta s & 0 & 0 \\ 0 & \pi & -(\mu + \delta + \sigma + \eta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta & -(\gamma + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & \gamma & -\mu \end{pmatrix}$$

4. Penentuan Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar yang dilambangkan dengan \mathcal{R}_0 merupakan batas ambang terjadinya penyebaran penyakit. Bilangan reproduksi dasar ini digunakan sebagai ukuran untuk mengetahui apakah populasi terjadi endemik atau tidak. Untuk menentukan bilangan reproduksi dasar, digunakan pendekatan the next generation matrix. Sehingga dari sistem persamaan (2) diperoleh

$$\mathcal{F} = (\beta s i) \text{ dan } \mathcal{V} = \begin{pmatrix} (\mu + \pi)e \\ (\mu + \delta + \sigma + \eta)i - \pi e \end{pmatrix}$$

Selanjutnya masing-masing elemen matriks \mathcal{F} dan \mathcal{V} diturunkan terhadap e dan i , sehingga diperoleh matriks.

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 & \beta s^0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta \Pi}{\mu} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dan } \mathcal{V} = \begin{pmatrix} \mu + \pi & 0 \\ -\pi & \mu + \delta + \sigma + \eta \end{pmatrix}$$

Kemudian perhitungan menggunakan pendekatan the next generation matrix yang diperoleh dengan menggunakan persamaan berikut.

$$G = \mathcal{F}\mathcal{V}^{-1}$$

dengan menggunakan software Mathematica diperoleh matriks G dan \mathcal{R}_0 yang merupakan nilai eigen maksimum dari matriks G .

$$G = \begin{pmatrix} \frac{\beta \Pi \pi}{\mu(\mu + \pi)(\mu + \delta + \sigma + \eta)} & \frac{\beta \Pi \pi}{\mu(\mu + \delta + \sigma + \eta)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dengan \mathcal{R}_0 yang diperoleh sebagai berikut.

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta \Pi \pi}{\mu(\mu + \pi)(\mu + \delta + \sigma + \eta)}$$

5. Analisis Kestabilan Titik Tetap Bebas Penyakit

Pada tahap ini, kestabilan titik tetap bebas penyakit dianalisis berdasarkan kriteria yang ditentukan oleh bilangan reproduksi dasar yang telah diperoleh pada tahap sebelumnya, dengan merujuk pada Teorema 1.

Teorema 1

Titik tetap bebas penyakit pada persamaan (2) bersifat stabil asimtotik lokal jika $\mathcal{R}_0 < 1$ dan tidak stabil jika $\mathcal{R}_0 > 1$.

Bukti.

Pelinearan pada titik tetap T_0 akan menghasilkan matriks Jacobi sebagai berikut.

$$J_{T_0} = \begin{pmatrix} J_{11} & 0 & J_{13} & 0 & 0 \\ 0 & J_{22} & J_{23} & 0 & 0 \\ 0 & J_{32} & J_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{43} & J_{44} & 0 \\ 0 & 0 & J_{53} & J_{54} & J_{55} \end{pmatrix}$$

dimana,

$$\begin{aligned} J_{11} &= -\mu & J_{32} &= \pi & J_{53} &= \sigma \\ J_{13} &= -\beta s^0 & J_{33} &= -(\mu + \delta + \sigma + \eta) & J_{54} &= \gamma \\ J_{22} &= -(\mu + \pi) & J_{43} &= \eta & J_{55} &= -\mu \\ J_{23} &= \beta s^0 & J_{44} &= -(\gamma + \mu) & & \end{aligned}$$

Penentuan nilai eigen dari J_{T_0} dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan karakteristik, yaitu $|\lambda I - J_{T_0}|$ atau dapat ditulis sebagai berikut.

$$\left| \begin{array}{ccccc} \lambda - J_{11} & 0 & J_{13} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - J_{22} & J_{23} & 0 & 0 \\ 0 & J_{32} & \lambda - J_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{43} & \lambda - J_{44} & 0 \\ 0 & 0 & J_{53} & J_{54} & \lambda - J_{55} \end{array} \right|$$

Diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$(\lambda - J_{11})(\lambda - J_{44})(\lambda - J_{55})(\lambda^2 + C_1\lambda + C_2) = 0$$

dengan

$$\begin{aligned} C_1 &= -(J_{22} + J_{33}) = (\mu + \pi) + (\mu + \delta + \sigma + \eta) \\ C_2 &= J_{22}J_{33} - J_{23}J_{32} = (\mu + \pi)(\mu + \delta + \sigma + \eta) - \pi\beta s^0 \end{aligned}$$

Berdasarkan kriteria Routh–Hurwitz, titik tetap bebas penyakit T_0 akan stabil jika dan hanya jika memenuhi syarat kestabilan $C_1 > 0$ dan $C_2 > 0$.

Dari bentuk koefisien di atas, terlihat bahwa $C_1 > 0$ selalu terpenuhi karena seluruh parameter model bernilai positif. Selanjutnya, syarat $C_2 > 0$ bergantung pada nilai bilangan reproduksi dasar \mathcal{R}_0 yang didefinisikan sebagai

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\pi\beta s^0}{(\mu + \pi)(\mu + \delta + \sigma + \eta)}$$

Apabila $\mathcal{R}_0 < 1$, maka berlaku pertidaksamaan

$$\pi\beta s^0 < (\mu + \pi)(\mu + \delta + \sigma + \eta)$$

Dengan demikian, kedua syarat kestabilan dari kriteria Routh–Hurwitz, yaitu $C_1 > 0$ dan $C_2 > 0$, terpenuhi ketika $\mathcal{R}_0 < 1$. Oleh karena itu, kedua nilai eigen yang diperoleh dari persamaan kuadrat memiliki bagian real negatif. Bersama dengan tiga nilai eigen lainnya yang juga bernilai negatif, dapat disimpulkan bahwa titik tetap bebas penyakit T_0 stabil asimtotik lokal jika $\mathcal{R}_0 < 1$ dan menjadi tidak stabil jika $\mathcal{R}_0 > 1$.

6. Analisis Kestabilan Titik Tetap Endemik

Teorema 2

Jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka titik tetap endemik persamaan (2) bersifat stabil asimtotik global.

Bukti.

Didefinisikan fungsi Lyapunov

$$V: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$$

dengan formula sebagai berikut.

$$V(s, e, i, q, r, v) = \frac{m_1}{2}(s - s^*)^2 + \frac{m_2}{2}(e - e^*)^2 + \frac{m_3}{2}(i - i^*)^2 + \frac{m_4}{2}(v - v^*)^2 + \frac{m_5}{2}(r - r^*)^2$$

dengan $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6 > 0$ sebagai faktor skala.

Karena fungsi V merupakan fungsi polinomial, maka V kontinu, terdiferensialkan, dan positif definit, serta mencapai nilai minimum nol hanya di titik tetap endemik T_1 .

Dengan mensubstitusikan sistem persamaan (2) maka

$$\frac{dV}{dt} = m_1(s - s^*)\frac{ds}{dt} + m_2(e - e^*)\frac{de}{dt} + m_3(i - i^*)\frac{di}{dt} + m_4(v - v^*)\frac{dv}{dt} + m_5(r - r^*)\frac{dr}{dt}$$

Dengan mensubstitusikan sistem persamaan (1.1), diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & m_1(s - s^*)(\Pi - \beta si - \mu s) + m_2(e - e^*)(\beta si - (\mu + \pi)e) + m_3(i - i^*)(\pi e \\ & - (\mu + \delta + \sigma + \eta)i) + m_4(v - v^*)(\eta i - (\mu + \gamma)v) + m_5(r - r^*)(\sigma i + \gamma v \\ & - \mu r) \end{aligned}$$

Karena $T_1 = (s^*, e^*, i^*, v^*, r^*)$ adalah titik tetap endemik, maka berlaku

$$\frac{ds}{dt} = \frac{de}{dt} = \frac{di}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{dr}{dt} = 0 \text{ di } T_1.$$

Dengan mengurangkan sistem pada keadaan umum dengan sistem pada titik tetap, diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & -m_1(\mu + \beta i)(s - s^*)^2 - m_2(\mu + \pi)(e - e^*)^2 - m_3(\mu + \delta + \sigma + \eta)(i - i^*)^2 \\ & - m_4(\mu + \gamma) + m_5\mu(r - r^*)^2 + C \end{aligned}$$

Dengan C merupakan suku bilangan yang dapat dikendalikan dengan pemilihan konstanta m_i . Misalkan

$$E_k = \{(s, e, i, v, r) \in \mathbb{R}^5 | V(s, e, i, v, r) \leq k\}$$

Karena V positif definit dan *radially unbounded*, maka E_k merupakan himpunan terutup dan terbatas.

Himpunan invarian terbesar dalam

$$\{(s, e, i, v, r) \in E_k | \dot{V} = 0\}$$

Hanya berisi titik tetap endemik T_1

Maka berdasarkan prinsip Invariansi Lasalle, titik tetap endemik

$$T_1 = (s^*, e^*, i^*, v^*, r^*)$$

Bersifat stabil asimtotik global.

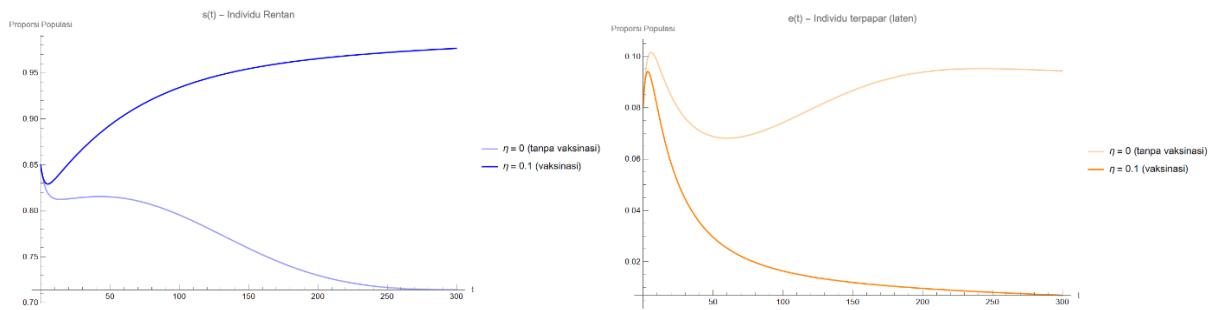
7. Simulasi Numerik

Simulasi numerik pada penelitian ini menggunakan software Mathematica 13.2 untuk memperlihatkan gambaran dinamika penyebaran tuberkulosis di Kota Mataram, sekaligus mengevaluasi efektivitas vaksinasi yang diberikan oleh pemerintah. Simulasi numerik bertujuan untuk menampilkan grafik jumlah kasus aktif (I) dan jumlah populasi yang divaksinasi (V) serta menunjukkan bagaimana titik tetap dari masing-masing kompartemen berubah berdasarkan nilai parameter yang dimasukkan pada Tabel 2.

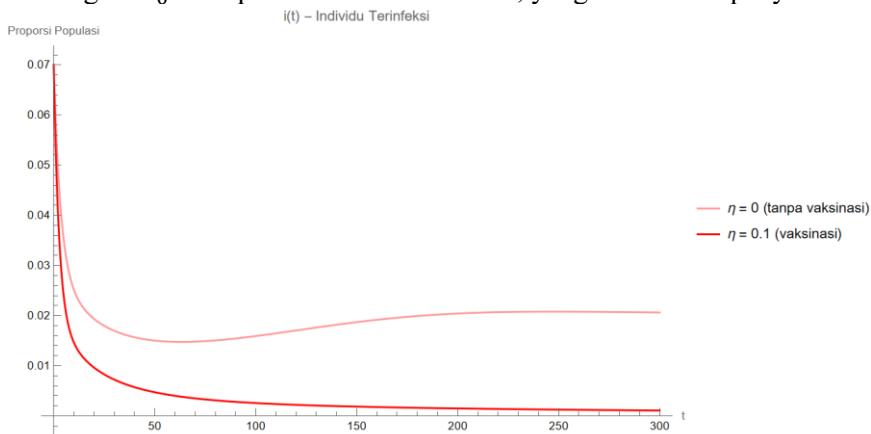
Diketahui total populasi penduduk Kota Mataram Provinsi NTB menurut data BPS Kota Mataram pada tahun 2024 adalah 459.680 jiwa, yang dibagi ke dalam beberapa subpopulasi sesuai status epidemiologis. Nilai awal dari subpopulasi tersebut diperoleh dari data kasus TBC tahun 2024 yaitu 2.087 kasus aktif. Populasi awal pada masing-masing kompartemen model SEIRV dinormalisasi, yaitu $S(0) = 0.9954, E(0) = 0.002, I(0) = 0.00454, V(0) = 0, R(0) = 0$. Untuk nilai-nilai parameter ada yang memang sesuai dengan data Kota Mataram tapi ada juga dibuat asumsi karena keterbatasan data. Berikut adalah ringkasan nilai parameter yang disajikan dalam tabel.

Table 2. Nilai-nilai Parameter

Simbol	$\mathcal{R}_0 < 1$	$\mathcal{R}_0 > 1$	Sumber
Π	0.0038	0.0038	BPS Kota Mataram 2024
β	0.30	0.30	Data Kasus Mataram 2024, Asumsi penularan tinggi
μ	0.024	0.024	BPS Kota Mataram 2024
π	0.05	0.05	WHO
δ	0.005	0.005	Asumsi
σ	0.20	0.20	Asumsi
η	0.10	0	Asumsi
γ	0.30	0.30	Asumsi

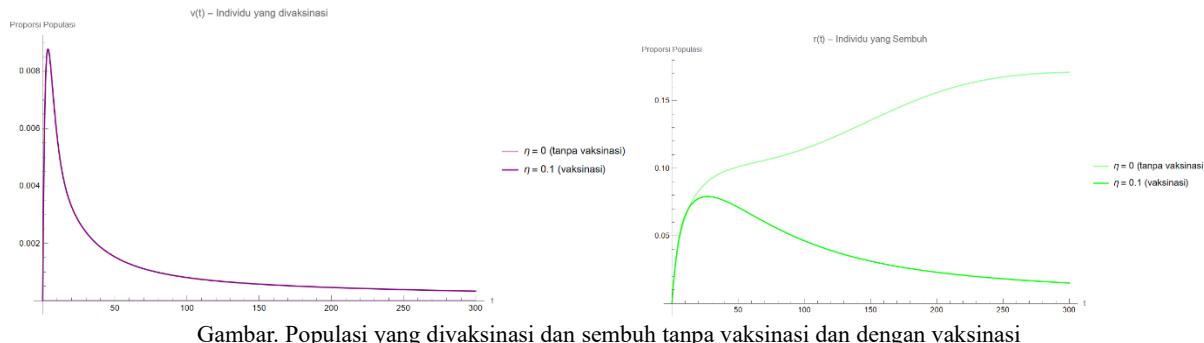

 Gambar 2. Populasi rentan (s) dan terpapar (e) tanpa vaksinasi dan dengan vaksinasi

Berdasarkan gambar 2, pada skenario tanpa vaksinasi ($\eta = 0$), populasi rentan awal sebesar 0.85 menurun secara perlahan karena sebagian individu terinfeksi. Grafik biru pudar menunjukkan penurunan moderat, seiring infeksi yang masih dapat menyebar ($\mathcal{R}_0 \approx 1.31 > 1$). Dengan vaksinasi ($\eta = 0.1$), populasi rentan menurun lebih cepat karena sebagian individu dipindahkan ke kategori vaksinasi, garis biru terang menunjukkan jumlah individu rentan menjadi lebih sedikit. Dalam skenario ini, $\mathcal{R}_0 \approx 0.91 < 1$, sehingga penyebaran infeksi terkontrol. Selanjutnya, populasi terpapar (exposed) meningkat dari 0.08 menuju puncak sekitar 0.15 – 0.2 tanpa vaksinasi, karena infeksi masih menular ke individu rentan. Grafik oranye pudar menunjukkan kenaikan yang cukup signifikan. Dengan vaksinasi, puncak terpapar lebih rendah dan terjadi lebih cepat, digambarkan oleh garis oranye terang. Hal ini konsisten dengan $\mathcal{R}_0 < 1$ pada skenario vaksinasi, yang membatasi penyebaran infeksi.


 Gambar 3. Populasi terinfeksi (i) tanpa vaksinasi dan dengan vaksinasi

Berdasarkan gambar 3, jumlah individu terinfeksi meningkat pada awalnya dan mencapai puncak signifikan pada skenario tanpa vaksinasi ($\eta = 0$), terlihat dari garis merah pudar. Penurunan jumlah

kasus terjadi perlahan karena pemulihan dan kematian. Dalam skenario vaksinasi ($\eta = 0.1$), puncak infeksi lebih rendah dan menurun lebih cepat, ditandai garis merah terang, karena sebagian individu dipindahkan ke kategori vaksinasi atau recovered. Nilai \mathcal{R}_0 yang lebih kecil pada skenario ini ($\mathcal{R}_0 = 0.91 < 1$) menjelaskan pengendalian infeksi.



Gambar. Populasi yang divaksinasi dan sembuh tanpa vaksinasi dan dengan vaksinasi

Berdasarkan gambar di atas, Tanpa vaksinasi ($\eta = 0$), populasi vaksin tetap nol, terlihat dari garis ungu pudar yang datar. Dengan vaksinasi, garis ungu terang meningkat secara bertahap, menunjukkan transisi individu dari terinfeksi ke kategori vaksinasi. Peningkatan populasi vaksin membantu menurunkan \mathcal{R}_0 efektif, membatasi penyebaran infeksi. Selanjutnya, untuk populasi sembuh meningkat seiring waktu pada kedua skenario. Garis hijau pudar (tanpa vaksinasi) menunjukkan kenaikan lambat karena pemulihan dari infeksi saja. Garis hijau terang (dengan vaksinasi) meningkat lebih cepat karena kombinasi pemulihan alami dan efek vaksinasi, menghasilkan jumlah individu yang kebal lebih banyak. Dengan vaksinasi, $\mathcal{R}_0 < 1$, sehingga infeksi dapat terkendali dan populasi recovered lebih tinggi.

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Berdasarkan hasil simulasi model SEIQRV dengan dua skenario tanpa vaksinasi ($\eta = 0$) dan dengan vaksinasi ($\eta = 0.1$) beberapa kesimpulan sebagai berikut.

1. Populasi rentan menurun lebih cepat ketika vaksinasi diterapkan. Hal ini menunjukkan bahwa vaksinasi efektif mengurangi jumlah individu yang berpotensi terinfeksi.
2. Jumlah terpapar dan terinfeksi jauh lebih rendah pada skenario vaksinasi dibandingkan tanpa vaksinasi. Simulasi menunjukkan bahwa puncak infeksi berkurang dan terjadi lebih cepat, menandakan penyebaran penyakit lebih cepat terkendali.
3. Populasi yang divaksinasi meningkat secara signifikan pada skenario vaksinasi, sedangkan tanpa vaksinasi tetap nol. Hal ini memperlihatkan peran langsung vaksin dalam membangun kekebalan populasi.
4. Populasi sembuh lebih tinggi pada skenario vaksinasi, menandakan bahwa kombinasi pemulihan alami dan vaksinasi mempercepat tercapainya kekebalan kelompok.
5. Analisis bilangan reproduksi dasar \mathcal{R}_0 menunjukkan bahwa, tanpa vaksinasi $\mathcal{R}_0 \approx 1.31 > 1$ yang memungkinkan infeksi terus menyebar, sedangkan dengan vaksinasi $\mathcal{R}_0 \approx 0.91 > 1$ sehingga penyebaran infeksi dapat dikendalikan.

Secara keseluruhan, simulasi menunjukkan bahwa vaksinasi terbukti menurunkan jumlah kasus aktif, mempercepat pengendalian penyakit, dan meningkatkan proporsi individu kebal.

Saran

Berdasarkan hasil penelitian ini, beberapa rekomendasi kebijakan dapat diajukan:

1. Implementasi program vaksinasi yang luas dan tepat waktu sangat penting untuk mengendalikan penyebaran penyakit TB. Simulasi menunjukkan bahwa peningkatan cakupan vaksinasi menurunkan bilangan reproduksi \mathcal{R}_0 dan membatasi jumlah kasus aktif.
2. Prioritas vaksinasi bagi populasi rentan dan kelompok berisiko tinggi dapat lebih efektif menurunkan \mathcal{R}_0 dan mencegah lonjakan kasus, karena kelompok ini lebih mungkin terpapar dan menularkan infeksi.

3. Monitoring dan evaluasi efektivitas vaksinasi harus dilakukan secara berkala, sehingga strategi pengendalian dapat disesuaikan dengan kondisi nyata di lapangan.
4. Kombinasi vaksinasi dengan langkah-langkah lain seperti isolasi kasus, edukasi masyarakat, dan peningkatan akses pengobatan dapat meningkatkan efektivitas pengendalian penyakit.
5. Keterbatasan data TB di Kota Mataram perlu diperhatikan. Data yang tersedia sering kali tidak lengkap untuk seluruh kelompok usia, cakupan vaksinasi dewasa belum ada, dan tingkat pelaporan kasus mungkin belum mencerminkan jumlah sebenarnya. Oleh karena itu, hasil simulasi yang menggunakan asumsi tertentu (misalnya nilai $\eta = 0.1$) bersifat hipotetis untuk mengevaluasi potensi kebijakan, dan interpretasi kebijakan harus dilakukan dengan mempertimbangkan keterbatasan ini.

DAFTAR PUSTAKA

- Agustanico Dwi Muryadi. (2017). MODEL EVALUASI PROGRAM DALAM PENELITIAN EVALUASI. *Jurnal Ilmiah PENJAS*, 13(3), 1576–1580.
- Aini, N., Ramadiani, R., & Hatta, H. R. (2017). Sistem Pakar Pendiagnosa Penyakit Tuberkulosis. *Informatika Mulawarman : Jurnal Ilmiah Ilmu Komputer*, 12(1), 56. <https://doi.org/10.30872/jim.v12i1.224>
- Anugrah, S. (2014). Hubungan antara Tingkat Pengetahuan Tentang Tb Paru, Status Gizi, Riwayat Kontak Keluarga, dan Riwayat Merokok Pasien yang Berobat ke Up4 dengan Kejadiannya di Up4 Kota Pontianak. *Jurnal Mahasiswa PSPD FK Universitas Tanjungpura*, 1(1).
- Badan Pusat Statistik (BPS) Kota Mataram. (2024). *Profil statistik dan publikasi resmi daerah*. <https://mataramkota.bps.go.id>
- Castillo-Chavez, C., & Song, B. (2004). Dynamical Models of Tuberculosis and Their Applications. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 1(2), 361–404. <https://doi.org/10.3934/mbe.2004.1.361>
- Christyanti, R. D., & Syahdan, S. (2019). Solusi Numerik Model Epidemi Seir pada Penyebaran Tuberkulosis dengan Metode Dekomposisi Adomian. *JMPM: Jurnal Matematika Dan Pendidikan Matematika*, 4(2), 137–145. <https://doi.org/10.26594/jmpm.v4i2.1677>
- Hakim, R. N. (2019). Pengaruh Jumlah Kasus HIV/AIDS dan Cakupan Rumah Sehat terhadap Jumlah Kasus Tuberkulosis di Provinsi Jawa Timur. *Jurnal Biometrika Dan Kependudukan*, 7(2), 141. <https://doi.org/10.20473/jbk.v7i2.2018.141-148>
- Hattamurrahman, M. P. S., Sianturi, P., & Sumarno, H. (2024). Mathematical Model of COVID-19 Spread with Vaccination in Mataram City. *JTAM (Jurnal Teori Dan Aplikasi Matematika)*, 8(4), 1067. <https://doi.org/10.31764/jtam.v8i4.23113>
- Husna, L. D., Widiyanti, S. I., Fadilah, A., Nafisah, Z., & Desniarti, D. (2024). KEMAMPUAN PEMAHAMAN PEMODELAN MATEMATIS SISWA DALAM MENYELESAIKAN SOAL MATEMATIKA. *PHI: Jurnal Pendidikan Matematika*, 8(1), 150. <https://doi.org/10.33087/phi.v8i1.335>
- Irfandi, A., Khairunnisa, K., Veronika, E., & Azteria, V. (2024). SOSIALISASI PENINGKATAN PENGETAHUAN MASYARAKAT UNTUK MENCEGAH HIPERTENSI. *EJOIN : Jurnal Pengabdian Masyarakat*, 2(7), 1179–1183. <https://doi.org/10.55681/ejoin.v2i7.3239>
- Jia, Z., Cheng, S., & Jia, X. (2011). A mathematical model for evaluating tuberculosis screening strategies. *Journal of Evidence-Based Medicine*, 4(1), 48–52. <https://doi.org/10.1111/j.1756-5391.2011.01116.x>
- Okolo, P. N., Makama, C. G., & Abah, R. T. (2023). a Mathematical Model for Tuberculosis Infection Transmission Dynamics in the Presence of Testing and Therapy, Isolation and Treatment. *Fudma Journal of Sciences*, 7(6), 103–116. <https://doi.org/10.33003/fjs-2023-0706-2108>
- Ramdani, Y. (2006). Kajian pemahaman matematika melalui etika pemodelan matematika. *Jurnal Sosial Dan Pembangunan*, 22(1), 2. <https://doi.org/10.29313/mimbar.v22i1.198>
- Salim Nahdi, D. (2019). KETERAMPILAN MATEMATIKA DI ABAD 21. *Jurnal Cakrawala Pendas*, 5(2). <https://doi.org/10.31949/jcp.v5i2.1386>
- Stewart. (1891). Tuberculosis. *Atlanta Medical and Surgical Journal*, 1(2), 33–34. <https://doi.org/10.5694/j.1326-5377.1917.tb101415.x>

Sumarni, Y. (2018). Matematika Dalam Ilmu Manajemen. *Jurnal Equation*, 1(1), 11–24.

Ulfasari Rafflesia. (2014). *Model Penyebaran Penyakit Tuberkulosis (TBC)*.

World Health Organization. (2014). *Global Tuberculosis Report 2024*.

<https://www.who.int/teams/global-programme-on-tuberculosis-and-lung-health/tb-reports/global-tuberculosis-report-2024>

Zahwa, N., Nabilla, U., & Nurviana, N. (2022). Model Matematika Sitr pada Penyebaran Penyakit Tuberculosis di Provinsi Aceh. *Jurnal Pendidikan Matematika Dan Sains*, 10(1), 8–14.

<https://doi.org/10.21831/jpms.v10i1.50683>